Esercizi sulla regressione e lo stimatore OLS

Corso di Econometria

Professor Valerio Potì

Esercizi sulla regressione and lo stimatore dei minimi quadrati (OLS)

Esercizio B.1 (verifica di ipotesi su coefficienti)

Si consideri la regressione del punteggio medio ($TestScore_i$) di classe nei test INVALSI sulla dimensione delle classi (CS):

$$TestScore_i = \beta_0 + \beta_1 CS_i + u_i$$

Un ricercatore, usando i dati appunto sulla dimensione delle classi e il punteggio medio nei test per 50 classi stima, col metodo OLS, la seguente regressione (errori standard tra parentesi):

$$\widehat{TestScore} = \underbrace{640{,}3}_{(23.5)} - \underbrace{4{,}93}_{(2{,}02)} \times CS, \quad R^2 = 0{,}11, \quad SER = 8{,}7$$

a. Si costruisca un intervallo di confidenza di livello 95% per β_1, la pendenza della regressione. Possiamo rigettare l'ipotesi nulla $H_0 : \beta_1 = 0$ al livello di significatività del 5% in un test bilaterale? E al livello del 2.5% in un test unilaterale (contro l'ipotesi alternativa che $\beta_1 < 0$)?
b. Si calcoli il valore-p di un test bilaterale per l'ipotesi nulla $H_0 : \beta_1 = 0$. Si rigetta l'ipotesi nulla (i) al livello di significatività del 5% e (ii) al livello di significatività dell'1%?
c. Si calcoli il valore-p di un test bilaterale per l'ipotesi nulla $H_0 : \beta_1 = -5{,}0$. Senza calcoli aggiuntivi, si deduca se $-5{,}0$ è contenuto nell'intervallo di confidenza al 95% per β_1
d. Si costruisca un intervallo di confidenza al 90% per β_1

Soluzione

(a) L'intervallo di confidenza al 95% è per β_1 è {-4,93 $\pm$ 1,96 × 2,02}, ovvero

$$\{-8{,}889 \leq \beta_1 \leq -0{,}9708\}$$

Dunque, poiché $\beta_1 = 0$ è al di fuori di questo intervallo, possiamo rigettare l'ipotesi nulla $H_0 : \beta_1 = 0$ al livello di significatività del 5% in un test bilaterale ed al livello del 2.5% in un test unilaterale (contro l'ipotesi alternativa che $\beta_1 < 0$).

(b) La statistica t è

$$t^{act} = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{SE(\hat{\beta}_1)} = -\frac{4{,}93}{2{,}02} = -2{,}44$$

Per calcolare il valore-p del test $H_0: \beta_1 = 0$ contro $H_1: \beta_1 \neq 0$ possiamo utilizzare la distribuzione per campioni finiti oppure, se assumiamo che un campione con 50 osservazioni è grande, quella per campioni infiniti.

Se vogliamo utilizzare la distribuzione per campioni finiti, questa sarà una t-student con 50 gradi di libertà e dunque la funzione di Excel da utilizzare sarà DISTRIB.T. Avremmo, in questo caso, quanto segue:

$$\text{valore-p} = 2 \times \phi(-|t^{act}|) = 2 \times \phi(-2{,}44) = 2 \times 0{,}009 = 0{,}018 = 1{,}8\%$$

Il valore-p del test $H_0: \beta_1 = 0$ contro $H_1: \beta_1 \neq 0$ secondo la distribuzione in campioni infiniti (dunque utilizzando la distribuzione asintotica), ovvero quella di una variabile normale standardizzata, è invece

$$\text{valore-p} = 2 \times \phi(-|t^{act}|) = 2 \times \phi(-2{,}44) = 2 \times 0{,}007 = 0{,}014 = 1{,}4\%$$

che si trova tramite Excel utilizzando la funzione DISTRIB.NORM.ST.

Il valore-p è dunque in entrambi i casi maggiore di 1% ma minore di 5%. Dunque, si rifiuta la ipotesi nulla al livello di significatività del 5% ma non a quello dell'1% sia secondo la distribuzione per campioni infiniti che per quella in campioni infiniti.

(c) La statistica t è

$$t^{act} = \frac{\hat{\beta}_1 - (-5)}{SE(\hat{\beta}_1)} = \frac{-4{,}93 - (-5)}{2{,}02} = \frac{0.07}{2{,}02} = 0{,}034653$$

Utilizzando la distribuzione per campioni infiniti, il valore-p del test $H_0: \beta_1 = 0$ contro $H_1: \beta_1 \neq 0$ è dunque

$$\text{valore-p} = 2 \times \phi(-|t^{act}|) = 2 \times \phi(-0{,}034653) = 0{,}9723 \approx 97\%$$

Utilizzando la distribuzione per campioni finiti con $n - k - 1 = 50 - 1 - 2 = 48$ gradi di libertà, il valore-p del test $H_0: \beta_1 = 0$ contro $H_1: \beta_1 \neq 0$ è dunque

$$\text{valore-p} = 2 \times \phi(-|t^{act}|) = 2 \times \phi(-0{,}034653) = 0{,}9724 \approx 97\%$$

Il valore-p è dunque maggiore di 10% sia secondo la distribuzione per campioni finiti che per quella per campioni infiniti. Dunque, non si rifiuta la ipotesi nulla a qualunque livello convenzionale di significatività. Pertanto, possiamo concludere che $-5{,}0$ è contenuto nell'intervallo di confidenza al 95% per β_1.

(d) L'intervallo di confidenza è

$$\beta_0 \in \{-4{,}93 \pm 1{,}64 \times 2{,}02\}$$

Ovvero

$$-8{,}24 \leq \beta_0 \leq -1{,}61$$

Esercizio B.2 (Esercizio in Gretl su regressione vs. test su differenze di medie di sotto-campioni)

Preambolo:

Si ricordi che, quando abbiamo confrontato i distretti con dimensioni delle classi "piccole" (STR < 20) e "grandi" (STR ≥ 20), abbiamo ottenuto i risultati seguenti:

Dimensione classe	**Punteggio medio ($\bar{Y}$)**	**Deviazione standard (s_Y)**	***n***
Piccola	657,4	19,4	238
Grande	650,0	17,9	182

Questi risultati ci dicono che vi è un effetto significativo della numerosità delle classi sul rendimento scolastico, infatti calcolammo la seguente statistica del test t pari

$$t = \frac{\bar{Y}_s - \bar{Y}_l}{\sqrt{\frac{s_s^2}{n_s} + \frac{s_l^2}{n_l}}} = \frac{657{,}4 - 650{,}0}{\sqrt{\frac{19{,}4^2}{238} + \frac{17{,}9^2}{182}}} = \frac{7{,}4}{1{,}83} = 4{,}05$$

Poiché $|t| = 4{,}05 > 1{,}96$, rifiutammo (al livello di significatività del 5%) l'ipotesi nulla che le due medie coincidano.

Raggiungiamo conclusioni simili tramite la regressione di TESTSCR su STR, come mostrato dalla seguente schermata di Gretl:

```
Modello 1: OLS, usando le osservazioni 1-420
Variabile dipendente: TESTSCR

             coefficiente   errore std.   rapporto t    p-value
  ------------------------------------------------------------
  const       698,933        9,46749        73,82      6,57e-242 ***
  STR          -2,27981      0,479826       -4,751     2,78e-06  ***

Media var. dipendente   654,1565   SQM var. dipendente     19,05335
Somma quadr. residui    144315,5   E.S. della regressione  18,58097
R-quadro                0,051240   R-quadro corretto       0,048970
F(1, 418)               22,57511   P-value(F)              2,78e-06
Log-verosimiglianza    -1822,250   Criterio di Akaike      3648,499
Criterio di Schwarz     3656,580   Hannan-Quinn            3651,693
Note: SQM = scarto quadratico medio; E.S. = errore standard
```

Domanda:

Nel primo approccio che abbiamo visto non si usa la regressione mentre nell'altro la si usa.

La conclusione che raggiungiamo con i due approcci è simile ma non identica in termini di statistica del test t e, dunque, del livello di significatività a cui rifiutiamo l'ipotesi nulla che non ci sia alcun effetto.

Esiste un modo di raggiungere la stessa conclusione nei due approcci?

Risposta:

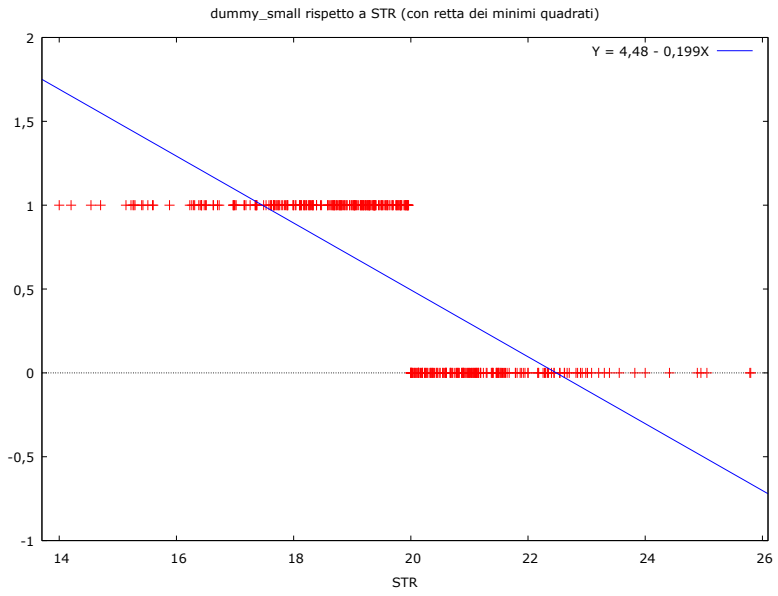
Si regredisca TESTSCR su una variabile di comodo ("dummy" in inglese) che assume valore 1 se STR < 20 e valore 0 altrimenti. È come stimare l'effetto di avere classi con meno o più di 20 studenti e infatti ci dà un risultato che ci porta alle stesse conclusioni di quello che abbiamo precedentemente ottenuto senza far ricorso alla regressione:

```
Modello 3: OLS, usando le osservazioni 1-420
Variabile dipendente: TESTSCR

               coefficiente   errore std.   rapporto t   p-value
  ------------------------------------------------------------------
  const          649,979        1,38772      468,4      0,0000   ***
  dummy_small      7,37241      1,84347        3,999    7,52e-05 ***

Media var. dipendente   654,1565   SQM var. dipendente     19,05335
Somma quadr. residui    146504,0   E.S. della regressione  18,72133
R-quadro                0,036852   R-quadro corretto       0,034548
F(1, 418)               15,99354   P-value(F)              0,000075
Log-verosimiglianza    -1825,410   Criterio di Akaike      3654,821
Criterio di Schwarz     3662,901   Hannan-Quinn            3658,015
Note: SQM = scarto quadratico medio; E.S. = errore standard
```

NB: come si crea la variabile di comodo in Gretl? Si fa così:

Aggiungi -> Definisci nuova variabile -> nella finestra di dialogo che si apre (che dice di "inserire la formula per la nuova variabile) digitare "dummy_small = STR < 20" -> verificare che la variabile desiderata sia ora inclusa tra quelle in memoria.

Per verificare che la variabile dummy creata sia davvero quella che ci serve, conviene mostrare in un grafico a dispersione come varia al variare di STR:



Per creare questo grafico fare così:

Visualizza -> Grafico -> X-Y a dispersione -> nella finestra di dialogo che segue, selezionare dummy_small come la variabile all'asse delle Y e STR come quella all'asse delle X.

Esercizio B.3 (Esercizio in Gretl su regressione e test di specificazione)

Si effettui ora prima una regressione di TESTSCR su STR e EL_PCT e poi una regressione di TESTSCR su STR, EL_PCT, ENRL_TOT e MEAL_PCT, come mostrato dalla seguente schermata di Gretl:

(a) Si calcoli la statistica F del test che l'R^2 è significativamente differente da zero e la si confronti con la statistica riportata nella stampa di Gretl.
(b) Si sottoponga a verifica l'ipotesi nulla che l'R^2 del primo modello non sia significativamente più piccolo di quello del secondo modello.
(c) Potremmo raggiungere la stessa conclusione guardando semplicemente i test di significatività dei singoli coefficienti?

Risposte

Le stime dei modelli considerati sono le seguenti:

Modello 1: OLS, usando le osservazioni 1-420
Variabile dipendente: TESTSCR

	Coefficiente	*Errore Std.*	*rapporto t*	*p-value*	
const	686,032	7,41131	92,57	<0,0001	***
STR	−1,10130	0,380278	−2,896	0,0040	***
EL_PCT	−0,649777	0,0393425	−16,52	<0,0001	***

Media var. dipendente	654,1565	SQM var. dipendente	19,05335
Somma quadr. residui	87245,29	E.S. della regressione	14,46448
R-quadro	0,426431	R-quadro corretto	0,423680
F(2, 417)	155,0136	P-value(F)	4,62e-51
Log-verosimiglianza	−1716,561	Criterio di Akaike	3439,123
Criterio di Schwarz	3451,243	Hannan-Quinn	3443,913

Modello 2: OLS, usando le osservazioni 1-420
Variabile dipendente: TESTSCR

	Coefficiente	*Errore Std.*	*rapporto t*	*p-value*	
const	700,959	4,78275	146,6	<0,0001	***
STR	−1,05248	0,247185	−4,258	<0,0001	***
EL_PCT	−0,131490	0,0343675	−3,826	0,0002	***
ENRL_TOT	0,000107882	0,000126871	0,8503	0,3956	
MEAL_PCT	−0,544480	0,0218673	−24,90	<0,0001	***

Media var. dipendente	654,1565	SQM var. dipendente	19,05335
Somma quadr. residui	34238,65	E.S. della regressione	9,083103
R-quadro	0,774908	R-quadro corretto	0,772738
F(4, 415)	357,1727	P-value(F)	6,7e-133
Log-verosimiglianza	−1520,134	Criterio di Akaike	3050,268
Criterio di Schwarz	3070,469	Hannan-Quinn	3058,252

Per quanto riguarda le risposte a ciascuna domanda, abbiamo:

(a) La statistica F del primo modello è

$$F = \frac{\frac{\left(R^2_{non\ ristretto} - R^2_{ristretto}\right)}{q}}{\frac{\left(1 - R^2_{non\ ristretto}\right)}{(n - k_{non\ ristretto} - 1)}} = \frac{(0{,}426431 - 0)\ \div\ 2}{(1 - 0{,}426431) \div\ (420 - 2 - 1)} = 155{,}0136$$

La statistica F del primo modello è

$$F = \frac{\frac{\left(R^2_{non\ ristretto} - R^2_{ristretto}\right)}{q}}{\frac{\left(1 - R^2_{non\ ristretto}\right)}{(n - k_{non\ ristretto} - 1)}} = \frac{(0{,}774908 - 0)\ \div\ 4}{(1 - 0{,}774908) \div\ (420 - 4 - 1)} =\ 357{,}1727$$

Sono gli stessi valori riportati da Gretl?

(b) La statistica F richiesta è

$$F = \frac{\frac{\left(R^2_{non\ ristretto} - R^2_{ristretto}\right)}{q}}{\frac{\left(1 - R^2_{non\ ristretto}\right)}{(n - k_{non\ ristretto} - 1)}} = \frac{(0{,}774908 - 0{,}426431)\ \div\ 2}{(1 - 0{,}774908) \div\ (420 - 4 - 1)} =\ 321{,}24$$

Se l'ipotesi nulla è corretta, questa avrà una distribuzione F con $q = 4 - 2 = 2$ ed $n - k_{non\ ristretto} - 1 = 420 - 4 - 1 = 420 - 4 - 1 = 415$ gradi di libertà. Secondo Gretl, il valore-p della statistica F del test è 5,11101e-085 (ovvero, 0,000). La ipotesi nulla, dunque, si rifiuta e concludiamo che l'R^2 del primo modello, probabilmente, è effettivamente più piccolo di quello del secondo e dunque, sempre probabilmente, I regressori aggiuntivi sono significativi.

(c) La conclusione di cui sopra è implicata dal fatto che il coefficiente di uno dei regressori aggiuntivi è significativo (ne è una condizione sufficiente anche se non necessaria).

Una domanda sorge spontanea: perché si usano allora i test F?